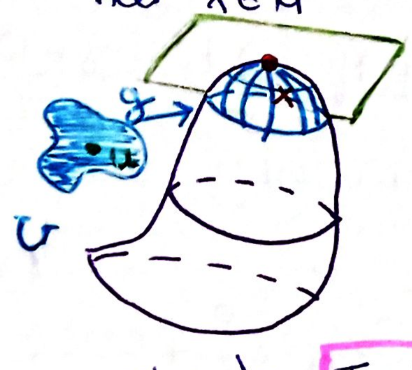
§ Εφαπτόμενος Χώρος

Ας υποθέσουμε ότι $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $x \in M^m$



Γύρω από το σημείο x διαλέγουμε μια παραμέτρηση $g: U \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ με $g(u) = x$

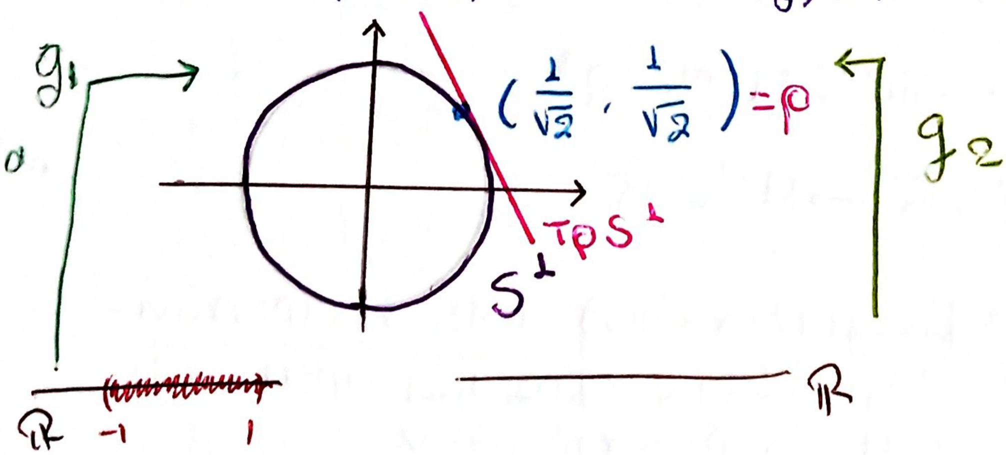
Ορίζουμε ως εφαπτόμενο χώρο του πολυπτύγματος M^m στο σημείο x το σύνολο $\boxed{T_x M = dg_u(\mathbb{R}^m)}$

Σημείωση Θυμίζουμε ότι το διαφορικό $dg_u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ είναι γραμμική απεικόνιση

Ερώτημα Είναι ο ορισμός του εφαπτόμενου χώρου ανεξάρτητος από την παραμέτρηση;

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



Γύρω από το σημείο $p(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ υπάρχουν τουλάχιστον 2 παραμετρήσεις:

$g_1(x) = (x, \sqrt{1-x^2}),\ x \in (-1, 1)$

$g_2(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in (0, \pi/2)$

Επίσης, $g_1(1/\sqrt{2}) = p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$$g_2(\pi/4) = p = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

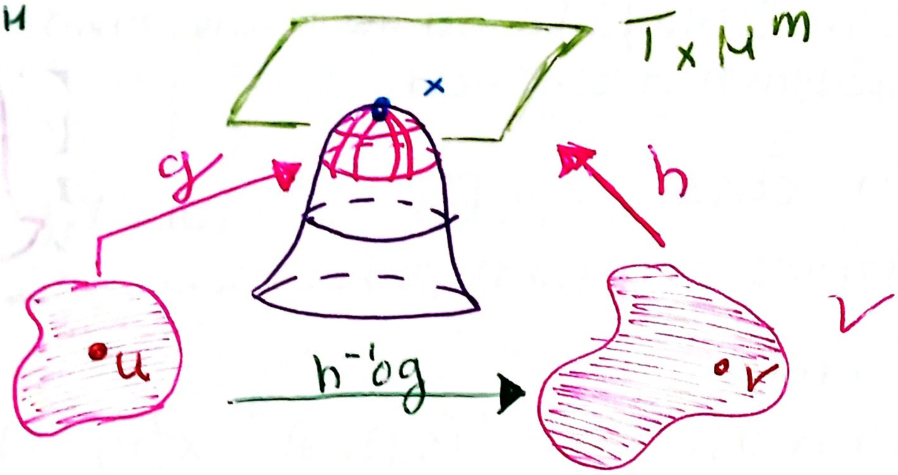
Το ερώτημα που τίθεται είναι αν $d(g_1)_{1/\sqrt{2}}(\mathbb{R}) = d(g_2)_{\pi/4}(\mathbb{R})$

Είναι ίδια; Αν όχι ο ορισμός δεν έχει νόημα.
Εδώ όμως είναι!

ΛΗΜΜΑ

Η κατασκευή του εφαπτόμενου χώρου <u>δεν</u> εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω ότι $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m \subseteq \mathbb{R}^k$

$$h : V \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m \subseteq \mathbb{R}^k$$

από το σημείο x με $g(u) = x = h(v)$, τότε η απεικόνιση $h^{-1} \circ g$ είναι διαφορομορφισμός και απεικονίζει κάποια περιοχή του u σε περιοχή του v

Επομένως, $d(h^{-1} \circ g)_u(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$

[$(h^{-1} \circ g)$ είναι ισομετρία]

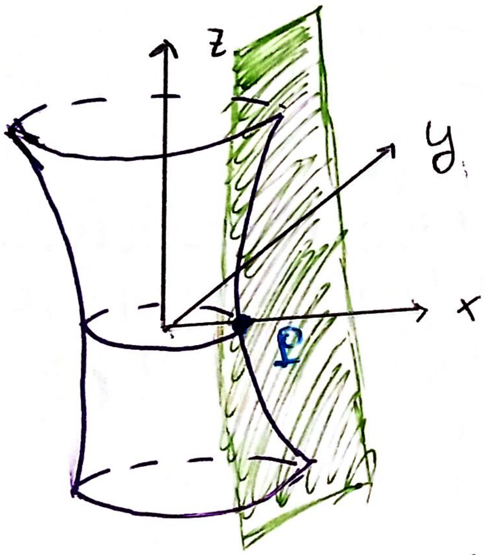
Εφόσον, $g = h \circ (h^{-1} \circ g)$ από τον κανόνα αλυσίδας

Θα έχουμε $dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_v(\underbrace{d(h^{-1}\circ g)_u(\mathbb{R}^m)}_{\mathbb{R}^m}) = dh_v(\mathbb{R}^m)$

Αυτό τελειώνει την απόδειξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε το υπερβολοειδές
$M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=a^2\}$, $a>0$ και ας βρούμε τον εφαπτόμενο χώρο του M_a στο σημείο $p=(\sqrt{a}, 0, 0)$



Το p βρίσκεται στο μέρος $M_a^+ = M_a \cap \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x>0\}$. Επομένως, μπορούμε να παραμετρήσουμε γύρω από το σημείο μέσω της απεικόνισης

$$g(u,v) = \sqrt{a^2+u^2-v^2}, u, v)$$

παρατηρούμε ότι $g(0,0) = (a,0,0)$.
Συνεπώς, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω ο $T_pM_a = dg_{(0,0)}(\mathbb{R}^2)$

Υπολογίζουμε $dg_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u/\sqrt{a^2+u^2-v^2} & -v/\sqrt{a^2+u^2-v^2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Επομένως, $dg_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα $dg_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$

οπότε $T_pM_a = \underbrace{\text{span}}_{\text{παράγεται από τα } \{\ \}}\{(0,1,0),(0,0,1)\} =$

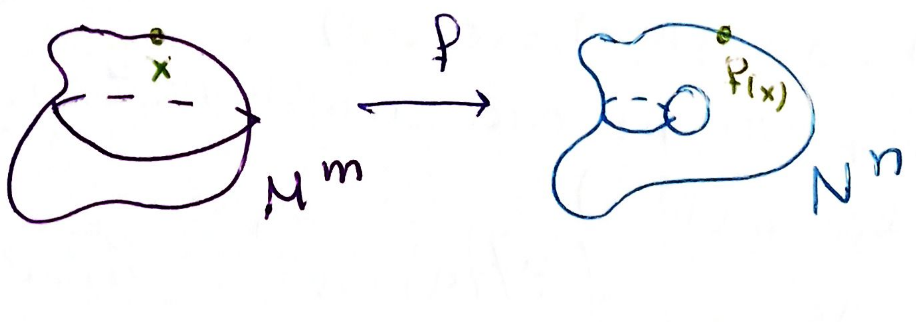
επίπεδο που διέρχεται από το p και είναι κάθετο στον άξονα x.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Σε ανώτερες διαστάσεις, για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$, ένας γραμμικός χώρος μπορεί να περιγραφεί είτε στη μορφή $\boxed{V = \text{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}}$ ή σε μορφή

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0 \\ b_1x_1 + \dots + b_kx_k = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

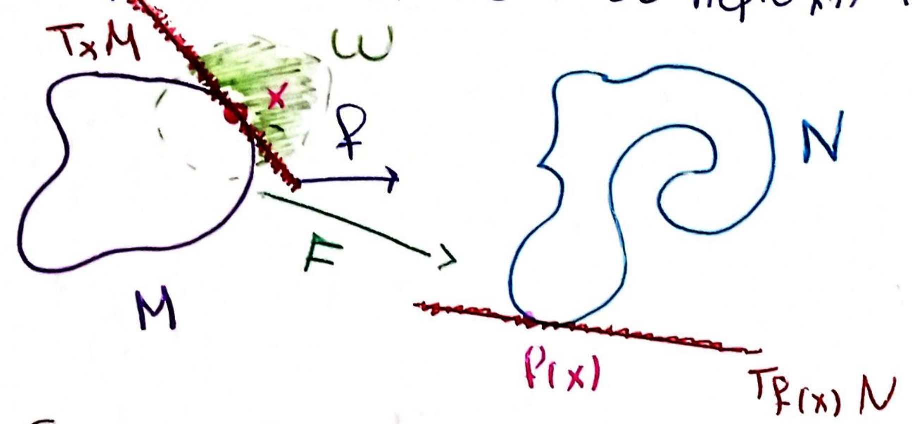
Θέλουμε να ορίσουμε διαφορικό μιας απεικόνισης μεταξύ πολυπτυγμάτων. Έστω $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ και $N^n \subseteq \mathbb{R}^\ell$ δύο πολυπτύγματα και f μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f: M^m \longrightarrow N^n$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Το διαφορικό της f στο σημείο x είναι η γραμμική απεικόνιση $df_x : T_xM^m \to T_{f(x)}N^n$ να ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^k$ που περιέχει το σημείο x και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $F : W \to \mathbb{R}^l$ έτσι ώστε $F|_{W \cap M^m} = f|_{W \cap M^m}$ και θέτουμε $df_x(\vec{v}) = dF_x(\vec{v})$

Θεωρώ επέκταση της F σε περιοχή του x.



ΕΡΩΤΗΜΑ ①

Είναι ο ορισμός ανεξάρτητος από την επιλογή επέκτασης;
(Εάν αυτό δεν είναι αλήθεια, ο ορισμός δεν είναι καλός)

ΕΡΩΤΗΜΑ ②

Μήπως υπάρχει τρόπος να εκφράσουμε το διαφορικό χρησιμοποιώντας παραμετρήσεις; (Ναι)

ΕΡΩΤΗΜΑ ③

Μπορούμε να μεταφέρουμε τα γνωστά θεωρήματα της ανάλυσης (ΑΠΕΙ III) για απεικονίσεις μεταξύ πολυπτυγμάτων; (ΝΑΙ)

Για παράδειγμα αν $f : M^m \to N^n$ με $df = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f$ σταθερή;

Ερωτημα 4
Πως εκφραζεται ο πινακας του διαφορικού;